Actes IAF 2013

Réseaux de préférences conditionnelles et logique possibiliste

Didier Dubois[1] **Henri Prade**[1] **Fayçal Touazi**[1]

[1] IRIT, Université de Toulouse, 118 route de Narbonne, Toulouse
`{dubois,prade, faycal.touazi}@irit.fr`

Résumé

Les "CP-nets" constituent un format compact de représentation des préférences, bien connu en Intelligence Artificielle, qui peut être vu comme une contrepartie qualitative des réseaux bayésiens. Dans le cas d'attributs binaires, ils permettent de représenter des ordres partiels particuliers sur des interprétations booléennes, où des préférences strictes sont définies entre des interprétations qui diffèrent par le basculement de la valeur d'une seule variable. Ils satisfont l'indépendance préférentielle exprimée ici par un principe "ceteris paribus". La popularité de cette approche a motivé des comparaisons avec d'autres cadres représentationnels tels que la logique possibiliste. Dans cet article, nous discutons la question de savoir s'il est toujours possible de représenter exactement l'ordre partiel d'un CP-net au moyen d'une base de formules en logique possibiliste avec une sémantique appropriée. Des résultats annoncés dans la littérature sont remis partiellement en question. Des exemples canoniques présentant des structures topologiques différentes montrent que dans certains cas, identifiés dans l'article, seule une représentation approchée est obtenue. La discussion d'un autre exemple montre certains aspects discutables de l'ordre proposé par le CP-net associé et la difficulté de réconcilier les deux cadres représentationnels.

Abstract

CP-nets are a well-known compact graphical representation of preferences in Artificial Intelligence, that can be viewed as a qualitative counterpart to Bayesian nets. In case of binary attributes it captures specific partial orderings over Boolean interpretations where strict preference statements are defined between interpretations which differ by a single flip of an attribute value. It respects preferential independence encoded by the ceteris paribus property. The popularity of this approach has motivated some comparison with other preference representation setting such as possibilistic logic. In this paper, we focus our discussion on the possibilistic representation of CP-nets, and the question whether it is possible to capture the CP-net partial order over interpretations by means of a possibilistic knowledge base and a suitable semantics. We show that several results in the literature on the alleged faithful representation of CP-nets by possibilistic bases are questionable. To this aim we discuss some canonical examples of CP-net topologies where the considered possibilistic approach fails to exactly capture the partial order induced by CP-nets, thus shedding light on the difficulties encountered when trying to reconcile the two frameworks.

1 Introduction

La représentation et le traitement des préférences ont été étudiés dans le domaine de l'intelligence artificielle (IA), la recherche opérationnelle, et les bases de données ; voir [6] pour une introduction. Les "CP-nets" [5] sont particulièrement populaires en IA comme cadre pour exprimer des préférences conditionnelles, sur la base d'une représentation graphique. L'idée est que les préférences des utilisateurs expriment que, dans un contexte donné, une situation partiellement décrite est strictement préférée à la situation opposée, d'une manière ceteris paribus (c'est-à-dire toutes choses égales par ailleurs). Cependant, l'application systématique du principe ceteris paribus introduit des restrictions dans l'expression des préférences. Ce fait a motivé la comparaison des CP-nets avec la logique possibiliste [9] puisque celle-ci fournit un autre cadre souple pour représenter les préférences [2, 1]. Dans la logique possibiliste, les propositions classiques expriment des buts, et les poids sont les niveaux de priorité qui expriment à quel point ces objectifs sont impératifs. Le mérite d'une représentation des préférences fondée sur une base logique est également la capacité de pouvoir raisonner sur les préférences, en particulier pour traiter leur possible incompatibilité. Une série de publications [7, 8, 15, 13, 10] ont abordé la question de la représentation des CP-nets à l'aide d'une base de formules en logique possibiliste. Puisque les CP-nets peuvent laisser des incomparabilités entre les interprétations, la représentation en logique possibiliste doit utiliser des poids symboliques partiellement ordonnés [3] pour laisser la place à des incompatibilités. Il a été également remarqué que les CP-Nets privilégient implicitement les contraintes de préférence associées à des nœuds pères par rapport à celles associées aux nœuds fils dans la représentation graphique.

Cependant, la représentation en logique possibiliste des CP-nets préconisée dans [15, 13, 10] n'est pas toujours totalement fidèle mais peut rester localement approximative. Le but de cet article est d'étudier en détail cet état de fait, en précisant également quand l'approche ne fournit pas une représentation exacte des CP-nets.

L'article est organisé comme suit. Premièrement, un bref historique sur la logique possibiliste, puis les CP-nets et leur codage en logique possibiliste avec des formules ayant des poids symboliques, sont rappelés dans les sections 2 et 3. Ensuite, dans la section 4, nous discutons les différents ordres partiels qui peuvent être utilisés pour comparer les vecteurs de poids symboliques qui reflètent la violation des préférences associées à chaque interprétation. Utilisé en tant que tel, chacun des ordres considérés nous permet de capturer l'ordre induit par le CP-net sur des structures graphiques spécifiques, mais ne parvient pas sur d'autres, comme indiqué en section 5. La section 6 indique sur quelles structures particulières, la représentation possibiliste existante est exacte, et montre plus généralement comment des approximations par en-dessous et par en-dessus peuvent être obtenues dans tous les cas. Section 7 aborde brièvement les travaux connexes et présente un dernier exemple qui souligne la difficulté de capturer exactement l'ordre des CP-nets en logique.

Cet article est une traduction de [11] (étendue pour ce qui est de la discussion de la section 7).

2 Logique possibiliste

Nous considérons un langage propositionnel où les formules sont notées p_1, ..., p_n, et Ω est l'ensemble de ses interprétations. Soit $B^N = \{(p_j, \alpha_j) \mid j = 1, \ldots, m\}$ une base possibiliste où p_j est une formule propositionnelle et $\alpha_j \in \mathcal{L} \subseteq [0, 1]$ est son niveau de priorité [9]. La conjonction et la disjonction logiques sont notées par $\wedge$ et $\vee$. Chaque formule (p_j, α_j) signifie que $N(p_j) \geq \alpha_j$, où N est une mesure de nécessité, c'est-à-dire, une fonction d'ensemble satisfaisant la propriété $N(p \wedge q) = \min(N(p), N(q))$. Une mesure de nécessité est associée à une distribution de possibilité π, et est définie comme suit :

$$N(p) = \min_{\omega \notin M(p)} (1 - \pi(\omega)) = 1 - \Pi(\neg p),$$

où Π est la mesure de possibilité duale de N et $M(p)$ est l'ensemble des modèles induits par le langage propositionnel sous-jacent pour lequel p est vrai.

La base B^N est associée à la distribution de possibilité

$$\pi_B^N(\omega) = \min_{j=1,\ldots,m} \pi_{(p_j, \alpha_j)}(\omega)$$

sur l'ensemble des interprétations, où $\pi_{(p_j,\alpha_j)}(\omega) = 1$ si $\omega \in M(p_j)$, et $\pi_{(p_j,\alpha_j)}(\omega) = 1 - \alpha_j$ si $\omega \notin M(p_j)$. Une interprétation ω est d'autant plus possible qu'elle ne viole aucune formule ayant un niveau de priorité élevé. Donc, si $\omega \notin M(p_j)$, $\pi_B^N(\omega) \leq 1 - \alpha_j$, et si $\omega \in \bigcap_{j \in J} M(\neg p_j)$, $\pi_B^N(\omega) \leq \min_{j \in J}(1 - \alpha_j)$. C'est une description "par en-dessus" de π_B^N, qui est la distribution de possibilité la moins spécifique, en accord avec la base de connaissances B^N. Une base possibiliste B^N peut-être transformée en une base où les formules p_i sont des clauses (sans modifier la distribution π_B^N). Nous pouvons encore voir B^N comme une conjonction de clauses pondérées, c'est-à-dire, comme une extension de la forme normale conjonctive.

3 Réseaux de préférences conditionnelles et leur codage en logique possibiliste

Un CP-net [5] est une représentation de nature graphique, qui exploite la dépendance conditionnelle des propositions, dans la structuration des préférences fournies par l'utilisateur. Le modèle fait penser à des réseaux bayésiens, mais la nature de la relation entre les nœuds d'un réseau est généralement assez faible, par rapport aux relations probabilistes dans les réseaux bayésiens. L'objectif de l'usage du modèle graphique est de capturer les déclarations qualitatives d'indépendance conditionnelle sur les préférences.

Definition 1. *Un CP-net $\mathcal{N}$ sur un ensemble de variables booléennes $V = \{X_1, \cdots, X_n\}$ est un graphe orienté, ayant pour nœuds $X_1, \cdots, X_n$, tel qu'un arc existe entre X_i et X_j si la préférence sur la variable X_j est conditionnée par la valeur de X_i. Chaque nœud $X_i \in V$ est associé avec une table de préférences conditionnelles $CPT(X_i)$, qui indique la préférence stricte*

($x_i > \neg x_i$ or $\neg x_i > x_i$) pour chaque instantiation des variables u_i associées aux nœuds parents de X_i (s'il y a lieu).

Un ordre de préférence satisfait complètement un CP-net $\mathcal{N}$ si et seulement s'il satisfait chaque préférence conditionnelle de $\mathcal{N}$. Dans ce cas, l'ordre de préférence est dit *consistant* avec $\mathcal{N}$. On note par $Pa(X)$ l'ensemble des parents directs de X, et par $Ch(X)$ l'ensemble des successeurs directs (fils) de X. L'ensemble d'interprétations d'un groupe de variables $S \subseteq V$ est noté par $Ast(S)$, avec $\Omega = Ast(V)$. Étant donné un CP-net $\mathcal{N}$, pour chaque nœud $X_i, i = 1, \ldots, n$, chaque entrée dans la table de préférence conditionnelle CPT_i est de la forme $\phi = u_i : \star x_i > \star \neg x_i$, où $u_i \in Ast(Pa(X_i)), \star$ est à remplacer par rien si la préférence est $x_i > \neg x_i$, et par $\neg$ sinon. Une telle préférence est codée en logique possibiliste par une contrainte de la forme $N(\neg u_i \vee \star x_i) \geq \alpha > 0$, où N est une mesure de nécessité [9], ce qui est équivalent ici à une contrainte sur une mesure de nécessité conditionnelle $N(\star x_i | u_i) \geq \alpha$, et donc à $\Pi(\neg \star x_i | u_i) \leq 1 - \alpha < 1$, où $\Pi(p) = 1 - N(\neg p)$ est la mesure de possibilité duale associée à N. Elle exprime que d'avoir $\neg \star x$ est en quelque sorte peu satisfaisant, avec une possibilité de $\neg \star x$ bornée par une valeur maximale $1 - \alpha$. Il est clair que la satisfaction de $\neg \star x$ est d'autant plus impossible que α est grand.

Le codage d'un CP-net en logique possibiliste est effectué comme suit :

- Selon les conventions ci-dessus, chaque entrée de la forme $u_i : \star x_i > \star \neg x_i$ dans la table de préférence conditionnelle CPT_i du nœud $X_i, i = 1, \ldots, n$ est codée par la clause en logique possibiliste $(\neg u_i \vee \star x_i, \alpha_i)$, où $\alpha_i > 0$ est un poids symbolique.
- Puisque le même poids est attaché à chaque clause construite à partir de CPT_i, l'ensemble des clauses pondérés induites par CPT_i est donc équivalent à la conjonction pondérée de $\phi_i = (\bigwedge_{u_i \in Ast(Pa(X_i))} (\neg u_i \vee \star x_i), \alpha_i)$, une par variable, ou à la paire de clauses pondérés (ϕ_i^+, ϕ_i^-) de la forme :

$$(\neg(\vee_{u_i \in A_i^+} u_i) \vee x_i, \alpha_i), (\neg(\vee_{u_i \in A_i^-} u_i) \vee \neg x_i, \alpha_i),$$

  où $\{A_i^+, A_i^-\}$ est une partition de $Ast(Pa(X_i))$, tel que $x_i > \neg x_i$ sur A_i^+ et $\neg x_i > x_i$ sur A_i^-.
- Des contraintes additionnelles sur les poids sont ajoutés. Le poids α_i attaché au nœud X_i, est supposé être strictement plus petit que le poids de chacun de ses parents : α_i^* ($\max(\{\alpha_i\} < \alpha_i^*)$).

Une base possibiliste partiellement ordonnée $(\Sigma, \succeq_\Sigma)$ est construite à partir d'un CP-net de la façon suivante, où $\succeq_\Sigma$ représente la relation d'ordre sur les contraintes de préférence. Notons $\mathcal{F}_\omega \subseteq \Sigma$, l'ensemble des formules falsifiées par l'interprétation $\omega \in \Omega$. Pour chaque interprétation ω, on associe un vecteur $\vec{\omega}(\Sigma)$ obtenu comme suit. Pour chaque formule pondérée $\phi_i^+ \wedge \phi_i^-$ dans la base possibiliste Σ satisfaite par ω, on met 1 dans le i^{eme} composante du vecteur, et $1 - \alpha_i$ sinon, en accord avec la sémantique de la logique possibiliste [9]. Par construction, $L = \{1, 1 - \alpha_i, i = 1 \ldots, n\}$, avec $1 > 1 - \alpha_i, \forall i$. Le vecteur $\vec{\omega}(\Sigma)$ a un format spécifique. À savoir sa composante v_i (un par nœud du CP-net) se trouve dans $\{1, 1 - \alpha_i\}$ pour $i = 1, \ldots, n$. Nous considérons les différents ordres partiels possibles pour comparer ces vecteurs dans la section suivante.

Exemple 1. *[5]. Figure. 1(a) illustre un CP-net sur des préférences pour une tenue de soirée. Il implique les variables J, P, et S, qui se rapportent respectivement à la veste, au pantalon et à la chemise :*

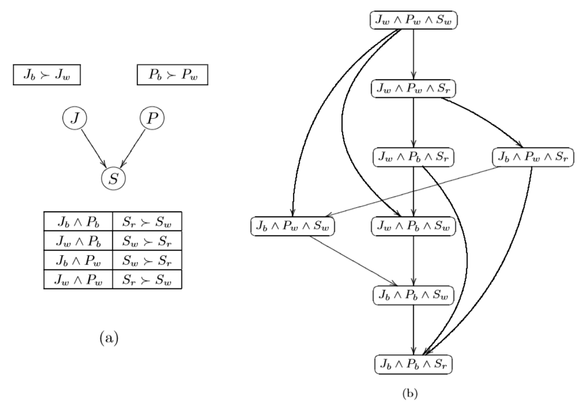

FIGURE 1 – Le CP-net et l'ordre partiel induit par lui sur l'exemple 1

- *Le noir (b) est préféré au blanc (w) pour la veste et le pantalon : $P_b > P_w$, ce qui nous donne la formule $\phi_P = (P_b, \alpha)$, et $J_b > J_w$, et la formule $\phi_J = (J_b, \beta)$.*
- *La préférence d'une chemise rouge plutôt que blanche est conditionnée par la ou les couleurs de la veste et du pantalon : s'ils ont la même couleur, alors une chemise blanche rendra la tenue trop terne, et donc une chemise rouge est préférée dans ce cas : $P_b \wedge J_b : S_r > S_w$; $P_w \wedge J_w : S_r > S_w$, ce qui donne la formule $\phi_S^- = (\neg(J = P) \vee S_r, \gamma)$.*
- *Sinon, si la veste et le pantalon sont de couleurs différentes, alors une chemise rouge rendra la tenue trop inharmonieuse, et donc une che-*

mise blanche sera préférée. $P_b \wedge J_w : S_w > S_r$ *;* $P_w \wedge J_b : S_w > S_r$*, ce qui donne la formule* $\phi_S^+ = ((J = P) \vee S_w, \gamma)$.

4 Relations d'ordre partiel entre vecteurs

Dans cette section nous allons présenter un certain nombre de relations d'ordre partiel dans le but de les utiliser pour générer un ordre particulier sur les interprétations. Dans la section 3, nous avons montré comment coder un CP-net en logique possibiliste. Puisque nous pouvons associer un vecteur à chaque interprétation en accord avec les formules de la base possibiliste, pour comparer deux interprétations, il suffit de comparer leurs vecteurs associés. Nous donnons d'abord la définition de relations d'ordre particulières sur les vecteurs, et ensuite nous discutons la façon de retrouver l'ordre partiel des CP-nets lorsque nous comparons les interpétations de la base des formules possibilistes, en utilisant ces techniques de comparaison de vecteurs. Soient $\vec{v} = (v_1, ..., v_k), \vec{v'} = (v'_1, ..., v'_k) \in L^k$ deux vecteurs, où L est partiellement ordonnée par $>$:

Definition 2 (Pareto)**.** $\vec{v} \succ_{Pareto} \vec{v'}$ *si et seulement si* $\forall i, v_i \geq v'_i$ *et* $\exists j, v_j > v'_j$.

Definition 3 (Pareto symétrique)**.** $\vec{v} \succ_{SP} \vec{v'}$ *si et seulement s'il existe une permutation* σ *des composantes de* $\vec{v'}$*, qui donne le vecteur* $\vec{v'}^{\sigma}$*, telle que* $\vec{v} \succ_{Pareto} \vec{v'}^{\sigma}$.

L'ordre discrimin, notée $\succ_{discrimin}$ est défini dans le cas d'une échelle totalement ordonnée de la façon suivante : les composantes des vecteurs identiques sont supprimées, et la comparaison se fait sur la base du minimum des composantes restantes pour chaque vecteur. Puisqu'ici les minimums ne correspondent pas toujours à une valeur unique, mais à des sous-ensembles de L^k, nous proposons la procédure suivante pour comparer les vecteurs :

Definition 4 (discrimin)**.** *Soit* $\mathfrak{D}(\vec{v}, \vec{v'}) = \{j | v_j \neq v'_j\}$ *un ensemble d'indices de composante où les deux vecteurs* $\vec{v}$ *et* $\vec{v'}$ *diffèrent. Ensuite* $v \succ_{discrimin} v'$ *ssi* $\min(\{v_i | i \in \mathfrak{D}(\vec{v}, \vec{v'})\} \cup \{v'_i | i \in \mathfrak{D}(\vec{v}, \vec{v'})\}) \subseteq \{v'_i | i \in \mathfrak{D}(\vec{v}, \vec{v'})\} \setminus \{v_i | i \in \mathfrak{D}(\vec{v}, \vec{v'})\}$*, où* min *ici retourne le sous-ensemble des valeurs incomparables les plus petites (par rapport à. >).*

Dans le cas standard d'une échelle totalement ordonnée, l'ordre leximin est défini comme suit : premièrement, les vecteurs sont ré-ordonnés d'une manière croissante, puis en appliquant l'ordre discrimin aux vecteurs ré-ordonnés. Puisque nous travaillons dans une configuration partiellement ordonnée, le réordonnement des vecteurs n'est plus unique, et nous devons généraliser la définition de la manière suivante :

Definition 5 (leximin)**.** *Premièrement, on supprime toutes les paires* (v_i, v'_j) *telles que* $v_i = v'_j$ *dans* $\vec{v}$ *et* $\vec{v'}$ *(chaque composante supprimée ne peut être utilisée qu'une seule fois dans le processus de suppression). Ainsi, on obtient deux vecteurs* $r(\vec{v})$ *et* $r(\vec{v'})$ *qui n'ont pas de composantes communes parmi les composantes restantes, c'est-à-dire* $r(\vec{v}) \cap r(\vec{v'}) = \emptyset$*. Ensuite,* $v \succ_{lex} v'$ *ssi* $\min(r(\vec{v}) \cup r(\vec{v'})) \subseteq r(\vec{v'})$.

Dans ce qui suit, nous allons appliquer ces ordres aux vecteurs particuliers liés au codage possibiliste des CP-nets, comme il est expliqué dans la section 3, où les valeurs possibles d'une composante i de vecteur sont soit 1 soit $1 - \alpha_i$ (les α_i étant tous distincts). Sur ces vecteurs particuliers, les ordres *leximin* et *discrimin* coïncident. En effet, puisque la valeur d'un élément du vecteur est soit '1' soit '$1 - \alpha_i$', et puisque chaque formule possibiliste attachée à un nœud dans le CP-net, est associée à un poids différent α_i, nous sommes sûrs que $1 - \alpha_i$ est présent seulement dans une composante. Avec ces hypothèses, la différence entre *leximin* et *discrimin* est que *leximin* supprime quelques composantes avec une valeur '1', car c'est la seule valeur d'une composante qui puissent être dans des positions différentes des vecteurs. Mais nous savons que '1' est la valeur la plus grande, donc cela ne peut pas affecter le résultat de l'application de l'opérateur min. C'est pourquoi les ordres *leximin* et *discrimin* coïncident sur ces vecteurs particuliers. Donc, dans la suite, nous mentionnons que l'ordre *leximin*.

Ces ordres ont déjà été utilisés pour capturer l'ordre des CP-nets : *Pareto symétrique* (PS), *discrimin* dans [13, 15], ou *leximin* dans [10] ou l'ordre min dans [7, 8]. Dans la section suivante, nous présentons une analyse comparative de ces différentes options et nous soulignons quand chaque ordre ne parvient pas à capturer exactement l'ordre du CP-net.

5 CP-nets vs logique possibiliste : contre-exemples

Il a été affirmé que l'ordre des CP-nets peut être capturé à l'aide du codage expliqué dans la section 3 en appliquant l'ordre *Pareto symétrique* [13, 15] rappelé dans la section 4, ou l'ordre *leximin* [10], aux vecteurs $\vec{\omega}(\Sigma)$. Ce n'est en effet vrai que pour des familles particulières de CP-nets, comme le montre l'exemple cidessous. Mais le codage possibiliste des CP-nets avec l'utilisation de l'un des ordres précédemment cités ne conduit pas toujours à une représentation exacte des CP-nets dans le cas général, comme nous allons le voir sur d'autres exemples.

Considérant l'exemple 1, à nouveau, le tableau 2 donne les degrés de satisfaction des clauses possibilistes codant les trois préférences élémentaires, et les huit interprétations possibles (choix), où α, β, γ sont les poids attachés aux nœuds J, P, S, respectivement.

TABLE 1 – Options possibles dans l'Exemple 1.

Ω	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
$P_bJ_bS_r$	1	1	1
$P_bJ_bS_w$	1	1	1- γ
$P_bJ_wS_w$	1	1-β	1
$P_wJ_bS_w$	1-α	1	1
$P_bJ_wS_r$	1	1-β	1-γ
$P_wJ_bS_r$	1-α	1	1-γ
$P_wJ_wS_r$	1-α	1-β	1-γ
$P_wJ_wS_w$	1-α	1-β	1

Nous introduisons les contraintes suivantes, $\alpha > \gamma$ et $\beta > \gamma$ entre les poids symboliques, qui donnent la priorité aux contraintes associées aux nœuds pères J, P sur celles correspondant au nœud fils S. Ensuite, l'application de l'ordre *Pareto symétrique*, ou de l'ordre *leximin*, nous permet d'ordonner les interprétations. On peut vérifier que l'ordre des interprétations obtenus par ces deux ordres appliqués aux vecteurs $\vec{\omega}(\Sigma)$ coïncide avec l'ordre induit par le CP-net, comme indiqué sur la Figure. 1(b) :

– $bbr \succ_N bbw \succ_N bww \succ_N bwr \succ_N bwr \succ_N wwr \succ_N www$.
– $bbr \succ_N bbw \succ_N wbw \succ_N wbr \succ_N wwr \succ_N www$.

Afin de fournir une discussion claire sur la représentation en logique possibiliste, nous établissons d'abord que la préférence entre les vecteurs d'interprétations, qui ne diffèrent que par un seul "flip" de variable, dépend uniquement des instantiations de la variable correspondante et de ses fils :

Proposition 1. *Soit X_i un nœud dans un CP-net $\mathcal{N}$ et $Y_i = V \setminus \{\{X_i\} \cup Pa(X_i)\}$. Soit $(\Sigma, \succeq_\Sigma)$ une base en logique possibiliste avec des poids partiellement ordonnés associée au CP-net $\mathcal{N}$. Si le CP-net contient la préférence $u_i : x_i > \neg x_i$ (resp : $u_i : \neg x_i > x_i$), la préférence associée dépend uniquement des instantiations de la variable X_i et de celles de ces fils.*

Preuve : Soient $\omega^+ = u_i x_i y_i$ et $\omega^- = u_i \neg x_i y_i$, $u_i \in A_i^+$. Puisqu'ils partagent la même affectation de variables sur $Pa(X_i)$, ces deux interprétations satisfont de la même façon ϕ_j^+ et $\phi_j^-, \forall X_j \in Pa(X)$. On note par $\mathcal{F}^{Pa}$ l'ensemble des formules $\phi_j^+, \phi_j^-, X_j \in Pa(X_i)$ falsifiées par ω^+, ω^- (ce sont les mêmes pour les deux interprétations) ; et par $\mathcal{F}^Y$ l'ensemble des formules $\phi_j^+, \phi_j^-, X_j \in Y_i \setminus Ch(X_i)$ falsifiées par ω^+, ω^- (c'est-à-dire que X_j n'est pas un descendant direct de X_i ni l'un de ses parents) ; et par $\mathcal{F}^{Ch}_{\omega^+}$ l'ensemble des formules $\phi_j^+, \phi_j^-, X_j \in Ch(X_i)$ falsifiées par ω^+ et $\mathcal{F}^{Ch}_{\omega^-}$ l'ensemble des formules falsifiées par ω^-. On a alors $\mathcal{F}_{\omega^+} = \mathcal{F}^{Pa} \cup \mathcal{F}^Y \cup \mathcal{F}^{Ch}_{\omega^+}$ et $\mathcal{F}_{\omega^-} = \mathcal{F}^{Pa} \cup \{\phi_i^+\} \cup \mathcal{F}^Y \cup \mathcal{F}^{Ch}_{\omega^-}$. Donc on a $\mathcal{F}_{\omega^+} \setminus \mathcal{F}_{\omega^-} = \mathcal{F}^{Ch}_{\omega^+}$ et $\mathcal{F}_{\omega^-} \setminus \mathcal{F}_{\omega^+} = \{\phi_i^+\} \cup \mathcal{F}^{Ch}_{\omega^-}$. Du fait de la construction de $(\Sigma, \succeq_\Sigma)$, on a que ϕ_i^+ est strictement préférée à toutes les formules de $\mathcal{F}^{Ch}_{\omega^+} \cup \mathcal{F}^{Ch}_{\omega^-}$. Alors on a $\forall \phi \in \mathcal{F}_{\omega^+} \setminus \mathcal{F}_{\omega^-}, \phi_i^+ \succ_\Sigma \phi$.

Soit X_k un fils de X_i. Notons que par construction, $\omega^+ \models \phi_k^+$ et $\omega^- \models \phi_k^-$. On a par ailleurs, $\omega^+ \models \neg\phi_k^-$ si seulement si $\omega^+ \models u_k$, et $\omega^- \models \neg\phi_k^+$ si seulement si $\omega^- \models u_k$. Il y a donc trois cas pour le nœud fils X_k :

– Soit $\omega^+ \models u_k$ et $\omega^- \models \neg u_k$ (alors $\phi_k^- \in \mathcal{F}^{Ch}_{\omega^+}$, mais $\phi_k^+ \notin \mathcal{F}^{Ch}_{\omega^+}$) ;
– Soit $\omega^+ \models \neg u_k$ et $\omega^- \models u_k$ (alors $\phi_k^+ \in \mathcal{F}^{Ch}_{\omega^-}$, mais $\phi_k^- \notin \mathcal{F}^{Ch}_{\omega^-}$) ;
– Soit $\omega^+ \models \neg u_k$ et $\omega^- \models \neg u_k$, et $\mathcal{F}^{Ch}_{\omega^-} \cup \mathcal{F}^{Ch}_{\omega^+}$ ne contient pas de formules relatives à la variable X_k.

Maintenant, il clair que $\vec{\omega}^+(\Sigma)$ et $\vec{\omega}^-(\Sigma)$ ne diffèrent que sur des éléments relatifs aux nœuds fils de X_i et à elle-même. $\square$

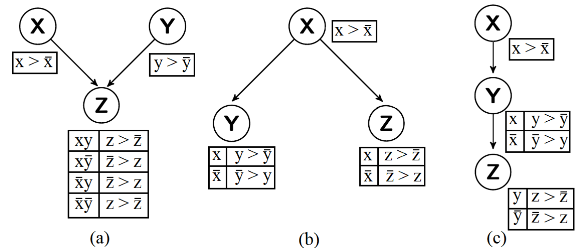

FIGURE 2 – Elementary cases of CP-nets

En raison de la structure particulière des CP-nets, et puisque nous avons montré que la préférence est uniquement liée à un nœud et leurs nœuds fils (Proposition 1), nous devons considérer les trois structures élémentaires suivantes :

– *Cas A* : Deux nœuds pères et un nœud fils (voir Figure 2(a)) (aussi Figure. 1) ;
– *Cas B* : un nœud père et deux nœuds fils (voir Figure 2(b)) ;
– *Cas C* : Un nœud père, un nœud fils et un nœud petit-fils (voir Figure 2(c)).

Donc, tout CP-net est une combinaison de ces trois cas élémentaires (avec peut-être plus de nœuds pères ou plus de nœuds fils). Compte tenu de ces trois structures de base, les exemples suivants montrent dans quel cas l'ordre particulier induit par $(\Sigma, \succeq_\Sigma)$ ne parvient pas à correspondre exactement à l'ordre des interpétations induit par le CP-net. Tout d'abord, considèrons l'exemple suivant :

Exemple 2. *$V = \{X, Y, Z\}$ est un ensemble de variables. Les contraintes de préférence sont comme suit : $\phi_1 = x > \bar{x}, \phi_2 = y > \bar{y}, \phi_3 = (X \equiv Y : z > \bar{z}, \neg(X \equiv Y) : \bar{z} > z), \phi_4 = (x : z > \bar{z}, \bar{x} : \bar{z} > z)$, $\phi_5 = (x : y > \bar{y}, \bar{x} : \bar{y} > y)$ et $\phi_6 = (y : z > \bar{z}, \bar{y} : \bar{z} > z)$. Les bases possibilistes des différents cas de la Figure 2 sont obtenus comme suit :*

- $\Sigma_a = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$: $\phi_1 = (x, \alpha_1), \phi_2 = (y, \alpha_2), \phi_3 = (((\neg(x \wedge y) \wedge \neg(\neg x \wedge \neg y)) \vee z) \wedge (\neg(x \wedge \neg y) \wedge \neg(\neg x \wedge y)) \vee \neg z), \alpha_3)$, et $\min(\alpha_1, \alpha_2) \succ_{\Sigma_a} \alpha_3$,

- $\Sigma_b = \{\phi_1, \phi_4, \phi_5\}$ avec $\phi_4 = ((\neg x \vee z) \wedge (x \vee \neg z), \alpha_4), \phi_5 = ((\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y), \alpha_5)$, avec $\alpha_1 \succ_{\Sigma_b} \max(\alpha_4, \alpha_5)$,

- $\Sigma_c = \{\phi_1, \phi_5, \phi_6\}$ avec $\phi_6 = ((\neg y \vee z) \wedge (y \vee \neg z), \alpha_6)$ et $\alpha_1 \succ_{\Sigma_c} \alpha_5 \succ_{\Sigma_c} \alpha_6$.

TABLE 2 – Les choix possibles dans l'Exemple 2.

Ω	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_1	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_1	ϕ_5	ϕ_6
xyz	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$xy\bar{z}$	1	1	1-α_3	1	1-α_4	1	1	1	1-α_6
$x\bar{y}z$	1	1-α_2	1-α_3	1	1	1-α_5	1	1-α_5	1-α_6
$x\bar{y}\bar{z}$	1	1-α_2	1	1	1-α_4	1-α_5	1	1-α_5	1
$\bar{x}yz$	1-α_1	1	1-α_3	1-α_1	1-α_4	1-α_5	1-α_1	1-α_5	1
$\bar{x}y\bar{z}$	1-α_1	1	1	1-α_1	1	1-α_5	1-α_1	1-α_5	1-α_6
$\bar{x}\bar{y}z$	1-α_1	1-α_2	1	1-α_1	1-α_4	1	1-α_1	1	1-α_6
$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	1-α_1	1-α_2	1-α_3	1-α_1	1	1	1-α_1	1	1

Les résultats sont comme suit :

- Dans le 1^{er} cas ($\mathcal{N}_a$), les ordres *Pareto symétrique* et *leximin* sont en mesure de capturer l'ordre CP-net exactement. Par contre, l'ordre min ne parvient pas à distinguer entre les interprétations $\{\bar{x}yz, \bar{x}y\bar{z}, \bar{x}\bar{y}z, \bar{x}\bar{y}\bar{z}\}$ et entre $\{x\bar{y}\bar{z}, x\bar{y}z\}$.
- Dans le 2^{eme} cas ($\mathcal{N}_b$), l'ordre *Pareto symétrique* n'est pas capable de capturer l'ordre CP-net exactement, et laisse les deux interprétations $\omega = x\bar{y}\bar{z}$ et $\omega' = \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ incomparables (tandis que le nœud X dans le CP-net assure que $x\bar{y}\bar{z} \succ_{\mathcal{N}} \bar{x}\bar{y}\bar{z}$). A part cela, la représentation obtenue est exacte. Les vecteurs associés à ces deux interpétations sont : $\vec{\omega}(\Sigma) = (1, 1-\alpha_4, 1-\alpha_5)$ et $\vec{\omega'}(\Sigma) = (1-\alpha_1, 1, 1)$. Ces vecteurs sont incomparables par *Pareto symétrique*. En effet $\nexists\, \sigma$ tel que $\vec{\omega}(\Sigma) \succ_{PS} \vec{\omega'}^{\sigma}(\Sigma)$, puisque $1 - \alpha_1 < \min(1 - \alpha_4, 1 - \alpha_5)$ tandis que $1 > \max(1-\alpha_4, 1-\alpha_5)$. Par contre, l'ordre min est en mesure de comparer ces deux interprétations $x\bar{y}\bar{z} \succ_{\min} \bar{x}\bar{y}\bar{z}$, mais il ne parvient pas à distinguer entre les interprétations $\{\bar{x}yz, \bar{x}y\bar{z}, \bar{x}\bar{y}z, \bar{x}\bar{y}\bar{z}\}$ et entre $\{x\bar{y}\bar{z}, xy\bar{z}\}$. Mais l'ordre *leximin* capture exactement l'ordre CP-net ici.
- Dans le 3^{eme} cas ($\mathcal{N}_c$), les deux ordres *leximin* et min ne parviennent pas à capturer exactement l'ordre du CP-net : les deux interprétations $\omega = x\bar{y}z$ et $\omega' = \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ deviennent comparables tandis que le CP-net *ne peut pas les comparer*. Puisque $\vec{\omega}(\Sigma) = (1, 1 - \alpha_5, 1 - \alpha_6)$ et $\vec{\omega}'(\Sigma) = (1 - \alpha_1, 1, 1)$, avec $\min(\vec{\omega}(\Sigma)) = 1 - \alpha_5$, $\min(\vec{\omega}'(\Sigma)) = 1 - \alpha_1$ et $1 - \alpha_1 < 1 - \alpha_5$, on a $\omega \succ_{lex} \omega'$ et $\omega \succ_{\min} \omega'$. Mais dans ce cas, l'ordre *Pareto symétrique* capture exactement l'ordre du CP-net.

Pour résumer, comme on l'observe dans l'exemple, l'ordre *Pareto symétrique* ne compare pas deux interprétations quand la variable concernée a plus d'un nœud fils comme dans *Cas B* (Figure. 2 (b)). Par contre, dans *Cas C* (Figure. 2 (c)) les ordres *leximin* et min brisent l'incomparabilité de certaines interprétations dans l'ordre induit par le CP-net.

6 Les relations entre les préférences en logique possibiliste et les CP-nets

Comme indiqué dans l'exemple 2 de la section précédente, l'ordre *Pareto symétrique* n'est pas assez raffiné pour capturer l'ordre CP-net en général, tandis que l'ordre *leximin* peut trop comparer certaines interprétations qui sont incomparables dans le CP-net. Dans cette section, nous allons établir les conditions dans lesquelles l'approche possibiliste peut capturer exactement l'ordre du CP-net. Est-ce que l'ordre *Pareto symétrique* est toujours moins raffiné (au sens large) que l'ordre CP-net ? Est-ce que l'ordre *leximin* est toujours plus raffiné (au sens large) que l'ordre CP-net ? Tout d'abord, nous prouvons que toute comparaison stricte obtenue par l'ordre *Pareto symétrique* est vraie dans l'ordre CP-net.

Proposition 2. *Soit $\mathcal{N}$ un CP-net acyclique et $(\Sigma, \succeq_\Sigma)$ la base partiellement ordonnée associée à ce CP-net. Soit $\succ_{PS}$ l'ordre partiel associé à $(\Sigma, \succeq_\Sigma)$.*

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \omega \succ_{PS} \omega' \;\Rightarrow\; \omega \succ_{\mathcal{N}} \omega'$$

Preuve de la proposition 2 :
Supposons que $\omega \succ_{PS} \omega'$. Cela signifie qu'il existe une

permutation σ de $\vec{\omega'}(\Sigma)$ de telle sorte que lorsqu'on compare le résultat de cette permutation avec $\vec{\omega}(\Sigma)$, ce dernier est supérieur ou égal, composante par composante, à $\vec{\omega'}^{\sigma}(\Sigma)$. Il y a deux cas : soit pour une composante, où il n'y a pas d'égalité, la comparaison entre les deux vecteurs est de la forme $1 > 1 - \alpha_{\sigma(i)}$, ou il y a au moins une composante où la comparaison prend la forme $1 - \alpha_j > 1 - \alpha_{\sigma(k)}$. Cela correspond respectivement à deux situations différentes :

– i) ω' falsifie plus de formules dans Σ que ω, et $\mathcal{F}_\omega \subset \mathcal{F}_{\omega'}$, où $\mathcal{F}_\omega$ (resp. $\mathcal{F}'_\omega$) note l'ensemble des nœuds falsifiés par l'interprétation ω (resp. ω'). Cela correspond à un cas déjà rencontré, où $\mathcal{F}_{\omega'} \setminus \mathcal{F}_\omega$ correspond exactement aux formules falsifiées dont la priorité $\alpha_{\sigma(i)}$ est impliquée dans les inégalités observées $1 > 1-\alpha_{\sigma(i)}$; il est connu que $\mathcal{F}_\omega \subset \mathcal{F}_{\omega'}$ implique $\omega \succ_{\mathcal{N}} \omega'$.

– ii) ω' falsifie au moins une formule dont la priorité est plus grande que celle d'une autre formule falsifiée par ω, notamment $1 - \alpha_j > 1 - \alpha_{\sigma(k)}$, ce qui est équivalent à $\alpha_j < \alpha_{\sigma(k)}$. En effet, il y a au moins une composante dans $\vec{\omega'}(\Sigma)$ de la forme $1 - \alpha_{\sigma(r)}$ qui est un élément minimal de ceux des deux sous-vecteurs sur lesquels $\vec{\omega}(\Sigma)$ et $\vec{\omega'}(\Sigma)$ diffèrent. Elle correspond à une formule de préférence ayant la priorité maximale $\alpha_{\sigma(r)}$, violée par ω' et non par ω. De plus, les contraintes $\alpha_j < \alpha_{\sigma(k)} \leq \alpha_{\sigma(r)}$ révèlent que les nœuds ayant ces priorités dans le CP-net, sont liées par un chemin dans le CP-net reliant un ancêtre $X_{\sigma(r)}$ (ayant une priorité maximale) à un descendant X_j. L'ensemble de ces chemins peut être associé à une chaîne de flips d'amélioration à partir de ω' jusqu'à ω, donc par transitivité on a aussi $\omega \succ_{\mathcal{N}} \omega'$. □

Nous avons remarqué qu'il y a des cas où l'ordre *Pareto symétrique* avec le codage possibiliste capture exactement l'ordre des CP-nets. La proposition suivante indique une classe de situations particulières où c'est effectivement le cas.

Proposition 3. *Soit $\mathcal{N}$ un CP-net acyclique tel que chaque nœud a au plus un fils. Soit $(\Sigma, \succeq_\Sigma)$ la base possibiliste partiellement ordonnée associée au CP-net $\mathcal{N}$ et $\succ_{PS}$ l'ordre partiel associé à $(\Sigma, \succeq_\Sigma)$. Alors,*

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \omega \succ_{PS} \omega' \iff \omega \succ_{\mathcal{N}} \omega'$$

Preuve de la Proposition 3 :
$\Rightarrow$) Supposons que $\omega \succ_{\mathcal{N}} \omega'$. On sait que ω domine ω' (c'est-à-dire $\omega \succ_{\mathcal{N}} \omega'$) si seulement s'il existe une chaîne de flips d'aggravations qui consiste à changer l'instantiation d'une seule variable à chaque fois. Cela signifie qu'il existe une séquence $\omega_0, \cdots, \omega_k$ telle que $\omega \succ_{\mathcal{N}} \omega_0 \succ_{\mathcal{N}} \cdots \succ \omega_k \succ_{\mathcal{N}} \omega'$, où $\omega \succ_{\mathcal{N}} \omega_0, \ldots, \omega_k \succ_{\mathcal{N}} \omega'$ sont des préférences ceteris paribus. Nous avons montré dans la Proposition 1 que de telles préférences sont liées à la variable concernée (ce qui correspond ici à la variable changée) et à ses fils. Puisque nous avons supposé que chaque nœud possède au plus un nœud fils, les vecteurs d'évaluation de chacune des deux interprétations dans la chaîne de flips d'aggravations diffèrent sur au plus deux éléments correspondant à la variable changée et à son nœud fils. Puisque nous donnons la priorité au nœud père sur le nœud fils, les deux interprétations sont classées par $\succ_{PS}$. Donc on a $\omega \succ_{PS} \omega_0 \succ_{PS} \cdots \succ_{PS} \omega_k \succ_{PS} \omega'$, et finalement $\omega \succ_{PS} \omega'$ par transitivité.
$\Leftarrow$) Par la proposition 2, on a : si $\omega \succ_{PS} \omega'$ alors $\omega \succ_{\mathcal{N}} \omega'$. □

Nous avons également remarqué sur quelques exemples que l'ordre *leximin* est plus raffiné que l'ordre induit par le CP-net. La proposition suivante établit que toute comparaison stricte obtenu par un CP-net est également vrai dans son homologue possibiliste en utilisant l'ordre *leximin* :

Proposition 4. *Soit $\mathcal{N}$ un CP-net acyclique. Soit $(\Sigma, \succeq_\Sigma)$ sa base possibiliste partiellement ordonnée associée. Soit $\succ_{lex}$ l'ordre partiel associé à $(\Sigma, \succeq_\Sigma)$. Alors,*

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \omega \succ_{\mathcal{N}} \omega' \Rightarrow \omega \succ_{lex} \omega'$$

Preuve de la Proposition 4 :
Puisque $\succ_{\mathcal{N}}$ est transitive, il suffit de prouver que cela est vrai pour deux interprétations $\omega \succ_{\mathcal{N}} \omega'$ où il existe un flip d'aggravation, et par transitivité nous obtenons le cas où il y a une chaîne de flips d'aggravations puisque l'ordre *leximin* est aussi transitif. Nous avons montré dans la Proposition 1 que de telles préférences sont liées à la variable concernée et à ses fils. Donc ω et ω', le $\min(\{v_i \in \vec{\omega}(\Sigma)\} \cup \{v_i \in \vec{\omega}'(\Sigma)\}) \subseteq \{v_j \in (\vec{\omega}'(\Sigma)\} \setminus \{v_j \in (\vec{\omega}(\Sigma)\})$. En effet, en cas de violation l'évaluation d'une préférence associée à un nœud père est toujours plus petite que n'importe quelle autre évaluation associée à ses fils ; le min pénalise alors l'interprétation qui falsifie les préférences du nœud père. Nous avons donc $\omega \succ_{lex} \omega'$. □

7 Travaux connexes et discussion finale

La représentation des préférences en logique possibiliste a été initialement préconisée dans [2, 1]. Son utilisation avec des poids symboliques pour l'approximation des CP-nets booléens acycliques [5] et les TCP-nets [16], a été discutée dans [7, 8, 14]. Puis, une représentation des CP-nets a été proposée avec l'utilisation de l'ordre *Pareto symétrique* [15, 13], et rappelée dans [12, 10] en utilisant l'ordre *leximin*. Ces représentations ont été présentées comme étant fidèles dans le cas général (sans fournir les preuves). Il s'avère que la représentation en utilisant l'ordre *Pareto symétrique* n'est exacte que pour une famille particulière de CP-nets. Nous avons montré que c'est effectivement le cas pour les CP-nets où les nœuds ont au plus un nœud fils. Nous avons également prouvé qu'en général c'est une approximation par en-dessous, tandis que l'utilisation de l'ordre *leximin* conduit à une approximation par en-dessus. Ainsi, la sémantique possibiliste qui pourrait mener à une représentation exacte de tout CP-net (acyclique) dans le cas général est encore à trouver (si elle existe). Cependant, l'ordre partiel induit par l'approche CP-net peut paraître quelque peu discutable, comme on peut le voir dans la suite. Ce fait met en question l'exacte représentabilité des CP-nets avec une autre approche qui traite les préférences d'une manière générale, comme l'approche possibiliste.

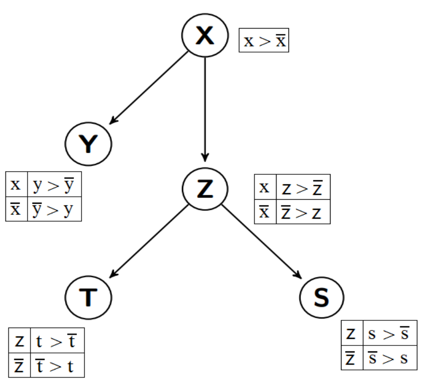

FIGURE 3 – CP-net d'Example 3

Exemple 3. *Considérons le CP-net de la Figure 3 sur les variables* $V = \{X, Y, S, Z, T\}$. *Soient les interprétations* $\omega = xyz\bar{s}\bar{t}, \omega' = x\bar{y}\bar{z}\bar{s}\bar{t}, \omega'' = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{s}\bar{t}$ *et* $\omega''' = xy\bar{z}\bar{s}t$.

On remarque que ω falsifie les préférences des deux nœuds petits-fils S, T, mais ω' falsifie les préférences des deux nœuds fils Y, Z. Par ailleurs, ω'' falsifie les préférences du nœud père X et ω''' falsifie les préférences du nœud fils Z et d'un nœud petit-fils T. L'ordre donné par le CP-net est le suivant $\omega \succ_{\mathcal{N}} \omega' \succ_{\mathcal{N}} \omega''$, $\omega \succ_{\mathcal{N}} \omega'''$, mais il ne dit rien sur ω''' vs. ω'' et ω'. Ainsi, falsifier les préférences des nœuds petit-fils S, T (comme dans ω) est mieux que de falsifier les préférences des nœuds fils Y, Z (comme dans ω'), ce qui est mieux que de falsifier les préférences d'un nœud père X (comme dans ω''), ce qui est en accord avec les priorités implicites de CP-net. Mais il est gênant que la violation des préférences d'un nœud fils Z et d'un nœud petit-fils T (comme dans ω''') soit incomparable avec la violation des préférences de deux nœuds fils Y, Z (comme dans ω'), et aussi incomparable avec la seule violation des préférences d'un nœud père X (comme dans ω''). Ce comportement n'est pas validé par l'approche possibiliste en utilisant l'ordre *leximin*.

Il est clair que les CP-nets et la logique possibiliste traitent les préférences chacun à sa manière. Même si les résultats ci-dessus fournissent des approximations par en-dessus et par en-dessous d'un CP-net. De façon générale la traduction des CP-nets en logique possibiliste fournit une base pour discuter les ordres obtenus dans les deux cadres. Prenons l'exemple comparatif ci-dessous pour affiner cette comparaison.

Exemple 4. *Soient deux CP-nets* $\mathcal{N}_a$ *et* $\mathcal{N}_b$ *(voir Figure 4) sur les quatre variables suivantes* $\{X, Y, S, T\}$. *Nous avons les bases possibilistes suivantes qui codent les préférences des deux CP-nets* $\mathcal{N}_a$ *et* $\mathcal{N}_b$: $\Sigma_a = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$ *avec* $\phi_1 = (x, \alpha_1)$, $\phi_2 = ((\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y), \alpha_2)$, $\phi_3 = ((\neg x \vee s) \wedge (x \vee \neg s), \alpha_3)$, $\phi_4 = ((\neg x \vee t) \wedge (x \vee \neg t), \alpha_4)$ *et* $\Sigma_b = \{\phi_1, \phi_2, \phi'_3, \phi'_4\}$ *avec* $\phi'_3 = ((\neg y \vee s) \wedge (y \vee \neg s), \alpha_3), \phi'_4 = ((\neg y \vee t) \wedge (y \vee \neg t), \alpha_4)$. *Considérons*

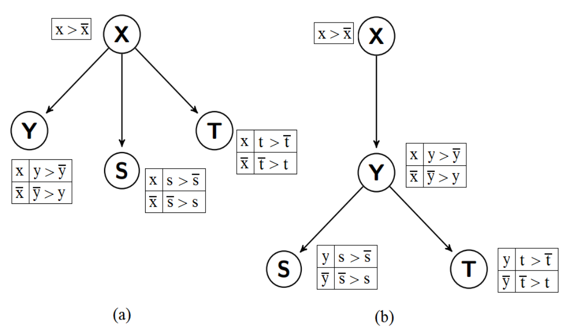

FIGURE 4 – Les 2 CP-nets $\mathcal{N}_a$ et $\mathcal{N}_b$ de l'exemple 4

les deux interprétations suivantes $\omega = x\bar{y}\bar{s}\bar{t}$ *et* $\omega' = \bar{x}\bar{y}\bar{s}\bar{t}$. *Notons que leurs vecteurs associés* $\vec{\omega}(\Sigma_a) = \vec{\omega}(\Sigma_b) = (1, 1-\alpha_2, 1-\alpha_3, 1-\alpha_4)$ *et* $\vec{\omega}'(\Sigma_a) = \vec{\omega}'(\Sigma_b) = (1-\alpha_1, 1, 1, 1)$ *sont les mêmes dans les deux bases possibilistes. Dans* Σ_a, *les contraintes sur les poids symboliques dans la base possibiliste* Σ_a *sont* $\alpha_1 > \max(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, *tandis que dans la base* Σ_b, *les contraintes sont* $\alpha_1 > \alpha_2, \alpha_2 > \max(\alpha_3, \alpha_4)$. *Ces deux interprétations ont non seulement les mêmes vecteurs de poids dans les deux CP-nets, mais aussi les mêmes contraintes sur les poids symboliques qui apparaissent dans la* *comparaison de ces vecteurs. Cependant, les deux CP-nets classent ω et ω' différemment, comme suit :*

- *dans le CP-net $\mathcal{N}_a$: ω est préférée à ω'.*
- *dans le CP-net $\mathcal{N}_b$: ω est incomparable à ω'.*

Mais, dans le cadre possibiliste, puisque les deux interprétations sont associées aux mêmes vecteurs dans les deux CP-nets (avec les mêmes contraintes d'ordre entre les poids symboliques), nous obtenons le même ordre (incomparabilité en utilisant l'ordre de *Pareto symétrique*, et l'ordre de préférence du CP-net $\mathcal{N}_a$ si on utilise l'ordre *leximin*). Cette situation est problématique pour les CP-nets, puisque les mêmes interprétations avec les mêmes contraintes sur les poids conduisent à des conclusions différentes. Cela signifie que lors de la comparaison des interprétations, les CP-nets prennent en compte des informations supplémentaires qui ne sont pas directement exprimées par les préférences sur les nœuds (la priorité des nœuds pères est plus grande que celle de ses nœuds fils), mais qui viennent de leur structure globale. Est-ce légitime en ce qui concerne la représentation des préférences ? Quelle est cette information supplémentaire ?

Dans le CP-net $\mathcal{N}_b$, on considère les quatre interprétations $\omega_1 = xy\bar{s}\bar{t}$, $\omega_2 = x\bar{y}\bar{s}\bar{t}$, $\omega_3 = \bar{x}\bar{y}\bar{s}\bar{t}$ et $\omega_4 = x\bar{y}s\bar{t}$. Le CP-net donne l'ordre $\omega_1 \succ_{\mathcal{N}_b} \omega_2 \succ_{\mathcal{N}_b} \{\omega_3, \omega_4\}$ mais laisse ω_3 et ω_4 incomparables (même situation que dans l'Exemple 3). En effet, dans les CP-nets, il est vrai que falsifier les préférences de deux nœuds petit-fils (soit ω_1), est moins grave que de falsifier celle de deux nœuds fils (soit ω_2), qui est encore moins grave que de falsifier les préférences d'un nœud père (ω_3). En se basant sur un argument de transitivité, il serait naturel de conclure que falsifier les préférences d'un nœud fils et d'un nœud petit-fils (ω_4) doit être mois grave que de falsifiér les préférences d'un nœud père (ω_3). Cependant, le CP-net ne conclut pas dans cette situation et laisse les deux interprétations ω_3 et ω_4 incomparables.

On a vu dans la section 3 que la traduction (éventuellement approchée) des CP-nets en logique possibiliste peut être réalisée en introduisant une relation d'ordre entre les poids symboliques attachés aux formules possibilistes qui codent les préférences des nœuds du CP-net, le CP-net donnant la priorité aux nœuds pères sur ses nœuds fils. D'un point de vue représentation des préférences, cet état de fait peut être gênant si les préférences les plus importantes ne sont pas effectivement celles associées aux nœuds pères [15, 12]. De plus, il s'avère que cette priorité entre les nœuds dans les CP-nets n'est pas transitive en général, comme le montre l'exemple ci-dessus, contrairement à ce que la représentation graphique semble exprimer. Cela peut remettre en question la fiabilité de la représentation des préférences de l'utilisateur par ces réseaux orientés acycliques. Ainsi, on peut penser que les CP-nets prennent en compte des informations supplémentaires qui bloquent cette transitivité dans le cas d'une comparaison de deux interprétations : la première falsifie les préférences d'un nœud père et l'autre falsifie les préférences d'un nœud fils et d'un nœud petits-fils. Cependant le cadre possibiliste suppose la transitivité des priorités. Prenons ϕ_1, ϕ_2 et ϕ'_3, les trois formules possibilistes qui codent les préférences dans la base possibiliste Σ_b de l'exemple 4. Notons la relation "plus important" par le symbole $\mapsto$. Puisque nous avons $\phi_1 \mapsto \phi_2$ et $\phi_2 \mapsto \phi'_3$, donc on en déduit la relation $\phi_1 \mapsto \phi'_3$ qui reflète comment les préférences de l'utilisateur sont exprimées (d'un point de vue transitivité entre les contraintes de préférences et même d'un point de vue représentation graphique). Alors, si on considère l'exemple précédent, il est clair qu'en logique possibiliste, il est mieux de falsifier les préférences d'un nœud fils et d'un nœud petit-fils (dans l'exemple c'est ω_4) que de falsifier les préférences d'un nœud père (respectivement ω_3), c'est-à-dire que nous avons $\omega_1 \succ_{\Sigma_b} \omega_2 \succ_{\Sigma_b} \omega_4 \succ_{\Sigma_b} \omega_3$.

Plusieurs questions restent donc ouvertes, notamment celle de déterminer les différentes points de divergences entre les CP-nets et le cadre possibiliste, si oui ou non tous les informations implicitement codées dans un CP-net peuvent être exprimées dans une logique propositionnelle pondérée, et quel est le cadre qui est le plus en accord avec la représentation fidèle des préférences de l'utilisateur.

8 Conclusion

L'intérêt d'une représentation de préférences avec un cadre logique tel que celui de la logique possibiliste repose d'abord sur la nature logique de la représentation et constitue une alternative à l'introduction d'une relation de préférence à l'intérieur d'un langage de représentation, comme, par exemple, dans [4]. Par ailleurs, la représentation possibiliste est expressive (voir [10]), et peut capturer des ordres partiels grâce à l'utilisation des poids symboliques, sans être obligé d'imposer des valeurs de priorité sur les préférences (comme pour les CP-nets où la préférence est donnée aux nœuds pères par rapport aux nœuds fils). Il reste encore beaucoup à faire. Tout d'abord, la question d'une représentation exacte d'un CP-net reste ouverte. Par ailleurs, récemment, une tentative a été faite

[10] pour représenter un cadre plus générale les CP-théories [17] en logique possibiliste (en introduisant de nouvelles inégalités entre les poids symboliques afin de prendre en compte l'idée des CP-théories pour exprimer que certaines préférences tiennent quelles que soient les valeurs de certaines variables spécifiées), où l'ordre *leximin* semble fournir une approximation par en-dessus. Cela reste à confirmer et à développer davantage. La comparaison des CP-nets avec les réseaux bayésiens possibilistes serait également une piste de recherche intéressante.

9 Remerciements

Les auteurs sont reconnaissants à Nic Wilson pour ses commentaires utiles sur leur précédent papier de workshop [10].

Références

[1] S. Benferhat, D. Dubois, S. Kaci, and H. Prade. Possibilistic logic representation of preferences : relating prioritized goals and satisfaction levels expressions. In *Proc. 15th. Europ. Conf.on Artificial Intelligence, ECAI 2002, Lyon, July 21-26, 2002*, pages 685–689. IOS Press, 2002.

[2] S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade. Towards a possibilistic logic handling of preferences. *Applied Intelligence*, 14 :303–317, 2001.

[3] S. Benferhat and H. Prade. Encoding formulas with partially constrained weights in a possibilistic-like many-sorted propositional logic. In L. Pack Kaelbling and A. Saffiotti, editors, *IJCAI-05, Proc. 19th Inter. Joint Conf. on Artificial Intelligence, Edinburgh, July 30-Aug. 5*, pages 1281–1286, 2005.

[4] M. Bienvenu, J. Lang, and N. Wilson. From preference logics to preference languages, and back. In F. Z. Lin, U. Sattler, and M. Truszczynski, editors, *Proc. 12th Inter. Conf. on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'10), Toronto, Canada, May 9-13*, pages 414–424. AAAI Press, 2010.

[5] C. Boutilier, R. I. Brafman, C. Domshlak, H. Hoos, and D. Poole. CP-nets : A tool for representing and reasoning with conditional ceteris paribus preference statements. *J. Artificial Intelligence Research (JAIR)*, 21 :135–191, 2004.

[6] C. Domshlak, E. Hüllermeier, S. Kaci, and H. Prade. Preferences in ai : An overview. *Artif. Intell.*, 175(7-8) :1037–1052, 2011.

[7] D. Dubois, S. Kaci, and H. Prade. CP-nets and possibilistic logic : Two approaches to preference modeling. Steps towards a comparison. In *Proc. of Multidisciplinary IJCAI'05 Workshop on Advances in Preference Handling, Edinburg, July 31-Aug. 1, 2005*, 2005.

[8] D. Dubois, S. Kaci, and H. Prade. Approximation of conditional preferences betworks "CP-nets" in possibilistic logic. In *IEEE Inter. Conf. on Fuzzy Syst.(FUZZ-IEEE), Vancouver, July 16-21*, 2006.

[9] D. Dubois and H. Prade. Possibilistic logic : a retrospective and prospective view. *Fuzzy Sets and Systems*, 144 :3–23, 2004.

[10] D. Dubois, H. Prade, and F. Touazi. Handling partially ordered preferences in possibilistic logic - A survey discussion -. *ECAI2012 Workshop on Weighted Logics for Artificial Intelligence*, pages 91–98, 2012.

[11] D. Dubois, H. Prade, and F. Touazi. Conditional preference networks and possibilistic logic. In *Proc. 12th Eur Conf on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'13),July 7-10*, 2013.

[12] A. HadjAli, S. Kaci, and H. Prade. Database preference queries - A possibilistic logic approach with symbolic priorities. *Ann. Math. Artif. Intell.*, 63(3-4) :357–383, 2011.

[13] S. Kaci. *Working With Preferences : Less Is More*. Springer, 2012.

[14] S. Kaci and H. Prade. Relaxing ceteris paribus preferences with partially ordered priorities. In *Europ. Conf. on Symbolic and Quant. Approaches to Reas. with Uncert. (ECSQARU'07), Hammamet,30-Nov.2*, pages 660–671, 2007.

[15] S. Kaci and H. Prade. Mastering the processing of preferences by using symbolic priorities. In *18th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'08)*, pages 376–380, 2008.

[16] N. Wilson. Extending CP-nets with stronger conditional preference statements. In *Proc. 19th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'04)*, pages 735–741, 2004.

[17] N. Wilson. Computational techniques for a simple theory of conditional preferences. *Artif. Intell.*, 175(7-8) :1053–1091, 2011.