La logique possibiliste avec poids symboliques : une preuve de complétude

Possibilistic logic with symbolic weights : a completeness proof

C. Cayrol D. Dubois F. Touazi
IRIT, CNRS & Université de Toulouse

118 Route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 09, {ccayrol,dubois,touazi}@irit.fr

Résumé :
On considère une variante de la logique possibiliste, déjà proposée par Benferhat et coll., où les poids attachés aux formules sont remplacés par des variables symboliques à valeur sur une échelle totalement ordonnée. On suppose qu'on ne dispose que de contraintes de domination stricte entre ces poids inconnus. Dans ce cas, on peut étendre la sémantique et l'axiomatisation de la logique possibiliste, mais sa complétude nécessite une nouvelle preuve qui est décrite ici. La mise en œuvre de cette logique peut exploiter des techniques de recherche de sous-bases maximales consistantes et de raisonnement abductif.

Mots-clés :
Logique possibiliste, ordre partiel, complétude.

Abstract:
This paper studies a variant of possibilistic logic already introduced by Benferhat *et al.*, where the weights attached to formulas are replaced by symbolic variables that take values on a totally ordered scale. We assume only strict dominance constraints are available between some of the symbolic weights. In such a contest it is possible to extend the semantics and the axiomatization of standard possibilistic logic to accommodate symbolic weights. However, the proof of completeness of possibilistic approach no longer applies. A new completeness proof is proposed in this paper for possibilistic logic with symbolic weights. The implementation of the proof method relies on the search for maximal consistent subbases, and on techniques in abductive reasoning.

Keywords:
Possibilistic logic, partial order, completeness.

1 Introduction

1.1 Cas 1. Fonction de rupture parabolique et $\mathbf{n}(\mathbf{v}, \mathbf{0}) = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{b})$

La logique possibiliste est une généralisation de la logique classique qui consiste, sur le plan syntaxique, à attacher des poids aux formules d'une base logique [9, 11, 12]. Ces poids appartiennent à une échelle de certitude totalement ordonnée et sont vus comme des bornes inférieures de mesures de nécessité. On obtient donc une stratification de la base. La validité d'une formule inférée est celle du maillon le plus faible de la meilleure chaîne de déduction. On construit ainsi une mesure de nécessité sur le langage. Cette logique est saine et complète pour la sémantique en termes de distributions de possibilité. On considère ici une extension de la logique possibiliste où les poids sont symboliques et représentent des valeurs mal connues dans une échelle totalement ordonnée, idée originellement proposée par Benferhat et coll. [2, 3]. La base est complétée par des contraintes de priorité entre les poids symboliques. Dans [3], ce sont des contraintes lâches. Ici on suppose des contraintes strictes, comme dans [2]. Dans le cas symbolique, la preuve de complétude, basée sur les coupes de la base possibiliste [9], ne peut s'appliquer. On donne ici une preuve de complétude, qui s'appuie sur les sous-bases minimales consistantes qui impliquent la formule à prouver.

2 La logique possibiliste symbolique (LPS)

Nous considérons un langage propositionnel où les formules sont notées ϕ_1, ..., ϕ_n, et Ω est l'ensemble des interprétations. On note $[\phi]$ l'ensemble des modèles de ϕ. La logique possibiliste est une extension de la logique classique qui manipule des formules pondérées (ϕ_j, r_j) où ϕ_j est une formule propositionnelle et $0 <$

$r_j \leq 1$. La formule pondérée (ϕ_j, r_j) s'interprète par $N(\phi_j) \geq r_j > 0$, avec N une mesure de nécessité [10]. La valeur r_j est alors vue comme le degré de certitude minimal de ϕ_j. On associe à une base possibiliste $\Sigma = \{(\phi_i, r_i),\ i = 1, \cdots, n\}$ une distribution de possibilité π_Σ sur Ω avec $\pi_\Sigma(\omega) = \min_i(\pi_i(\omega))$ où, $\forall i = 1, \cdots, n$:

$$\pi_i(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in [\phi_i]; \\ 1 - r_i \text{ si } \omega \notin [\phi_i] \end{cases}$$

La sémantique d'une base possibiliste se définit par la relation sur les interprétations induite par la distribution π_Σ. On a bien alors $N_\Sigma(\phi_j) \geq r_j$ avec N_Σ la mesure de nécessité définie par $N_\Sigma(\phi) = \min_{\omega \notin [\phi]}(1 - \pi_\Sigma(\omega))$.

2.1 Syntaxe de la LPS

Une base possibiliste symbolique est un ensemble de formules pondérées. Mais on considère ici que l'on ne dispose que de connaissances partielles sur l'ordre total entre les poids des formules. On utilise alors des poids symboliques et des contraintes sur ces poids symboliques. Cette idée a été d'abord proposée dans [2]. L'ensemble $\mathcal{P}$ des poids symboliques α_j est obtenu à l'aide d'un ensemble fini H de variables $a_1, \ldots, a_k, \ldots$ sur $]0, 1]$ et de $\max / \min$ expressions construites sur H :

$$H \subset \mathcal{P}, 0, 1 \in P,$$
et si $\alpha, \beta \in \mathcal{P}$ alors $\max(\alpha, \beta), \min(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}$.

Les éléments de H sont appelés poids symboliques élémentaires.

Soit $\Sigma = \{(\phi_i, \alpha_i),\ i = 1, \cdots, n\}$ une base en LPS, avec α_i une $\max / \min$ expression construite sur H. Une formule (ϕ_i, α_i) est toujours interprétée comme $N(\phi_i) \geq \alpha_i$.

2.2 Contraintes entre les poids

La connaissance sur l'ordre entre les poids symboliques est codée par un ensemble $C = \{\alpha_j > \beta_j,\ j = 1, \cdots, s\}$ de contraintes strictes entre des $\max / \min$ expressions, comme dans [2]. Tout ensemble fini de contraintes peut se mettre sous forme équivalente d'un ensemble de contraintes canoniques :

$$\max_{k=1 \cdots n} a_{ik} \quad > \quad \min_{\ell=1 \cdots m} b_{il} \quad a_{ik}, b_{i\ell} \in H$$

Ce qui veut dire $\exists k \in \{1 \cdots n\}, \exists \ell \in \{1 \cdots m\}, a_{ik} > b_{il}$. On définit $C \vDash \alpha > \beta$ ssi toute valuation des symboles apparaissant dans α, β (sur $]0, 1]$) qui satisfait les contraintes dans C satisfait aussi $\alpha > \beta$.

Remarque 1 *Dans [3], on utilise des contraintes de la forme $\alpha_i \geq \beta_j$ et on définit $C \vDash \alpha > \beta$ par $C \vDash \alpha \geq \beta$ et $C \nvDash \beta \geq \alpha$. Voir la discussion comparative en Section 4.3*

Dans cet article, $\alpha > \beta$ veut dire que cette inégalité tient dans *toutes* les instanciations de α, β conformes aux contraintes. Comme on s'intéresse seulement à savoir si une formule ϕ est plus certaine qu'une autre ψ, on se donne des contraintes strictes explicites dans C.

2.3 Sémantique

La sémantique d'une base possibiliste avec poids symboliques peut être définie de deux manières, comme dans le cas de la logique possibiliste standard. La première définition est basée sur la construction d'un ordre partiel sur les interprétations en calculant une expression symbolique de $\mathcal{P}$ pour chaque interprétation. Si $\Sigma(\omega)$ dénote les formules de Σ satisfaites par ω, notons que, dans le cas numérique,

$$\iota_\Sigma(\omega) = 1 - \pi_\Sigma(\omega) = \max_{j : \phi_j \notin \Sigma(\omega)} r_j.$$

Définition 1 *Soit Σ une base possibiliste avec des poids symboliques et $\omega,\ \omega' \in \Omega$ deux interprétations. La relation de plausibilité entre interprétations est définie par :*

$\omega >_\Sigma \omega'$ ssi $C \vDash \iota_\Sigma(\omega) < \iota_\Sigma(\omega')$
$\omega \geq_\Sigma \omega'$ ssi $C \vDash \iota_\Sigma(\omega) \leq \iota_\Sigma(\omega')$.

La relation $\geq_\Sigma$ est un préordre partiel sur les interprétations et $>_\Sigma$ un ordre partiel. On peut donc exprimer $N_\Sigma(\phi)$ comme

$$N_\Sigma(\phi) = \min_{\omega \not\models \phi} \max_{j : \phi_j \notin \Sigma(\omega)} \alpha_j$$

La relation $>_\Sigma$ permet de construire une fermeture déductive partiellement ordonnée comme suit :

$$\phi \succ_N \psi \text{ ssi } \forall \omega \notin [\phi], \exists \omega' \notin [\psi] \text{ et } \omega' >_\Sigma \omega.$$

On a alors : $\phi \succ_N \psi$ ssi $C \models N_\Sigma(\phi) > N_\Sigma(\psi)$.

On peut aussi définir directement la sémantique d'une base possibiliste symbolique sans passer par la distribution de possibilité π_Σ. Soit $\Sigma(\omega)$ l'ensemble des formules satisfaites par l'interprétation ω. Cette deuxième sémantique considère les formules violées de plus grande certitude (ordre best out [4]) :

$\omega \rhd_\Sigma \omega'$ ssi $\forall(\phi_j, \alpha_j) \in \Sigma$ t.q. $\phi_j \notin \Sigma(\omega)$, $\exists(\phi_i, \alpha_i) \in \Sigma$ t.q. $\phi_i \notin \Sigma(\omega)$ et $C \models \alpha_i > \alpha_j$

Cette sémantique, équivalente à l'autre quand les poids sont connus, est plus exigeante en LPS car pour avoir $\omega \rhd_\Sigma \omega'$, $\alpha_i > \alpha_j$ doit être vrai pour toutes les instances des poids symboliques. On ne considère que la première dans la suite.

La sémantique de la logique possibiliste permet de remplacer une conjonction pondérée $(\wedge_i \phi_i, \alpha)$ par l'ensemble de formules (ϕ_i, α). En effet, $N(\phi \wedge \psi) = \min(N(\phi), N(\psi))$ donc par le principe de spécificité minimale, on associe le même poids aux formules ϕ et ψ (mais celui-ci peut être modifié par l'inférence). En conséquence, on peut aussi se restreindre à des bases de clauses pondérées en LPS.

2.4 Inférence syntaxique en LPS

Une inférence syntaxique peut être définie avec les axiomes et les règles d'inférence suivants :

1. On garde les axiomes de la logique classique avec un degré 1.
a $(\phi \to (\psi \to \phi), 1)$
b $((\phi \to (\psi \to \chi)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi)), 1)$
c $(((\neg\phi) \to (\neg\psi)) \to (\psi \to \phi), 1)$
2. On utilise les règles d'inférence suivantes :
– Affaiblissement : $(\phi, \alpha) \vdash_\pi (\phi, \min(\alpha, \beta))$
– Modus Ponens : $\{(\phi \to \psi, \alpha), (\phi, \alpha)\} \vdash_\pi (\psi, \alpha)$
– Règle de fusion : $\{(\phi, \alpha), (\phi, \beta)\} \vdash_\pi (\phi, \max(\alpha, \beta))$

On en déduit la règle du Modus Ponens Pondéré :

$$\{(\phi \to \psi, \alpha), (\phi, \beta)\} \vdash_\pi (\psi, \min(\alpha, \beta))$$

Exemple 1
$\Sigma = \{(\phi, \alpha), (\neg\phi \vee \psi, \beta), (\neg\psi, \gamma)\}$ *avec* $C = \{\alpha > \gamma, \beta > \gamma\}$. *On a l'inférence suivante :* $\Sigma \vdash_\pi (\psi, \min(\alpha, \beta))$.

Dans le cas de poids connus (numériques par exemple), la logique possibiliste est correcte et complète pour le système d'inférence ci-dessus, ce qui se traduit par l'égalité :

$$N_\Sigma(\phi) = \max\{r : \Sigma \vdash_\pi (\phi, r)\}$$

Ce système d'inférence permet de définir le degré d'inconsistance d'une base possibiliste syntaxiquement . Le degré d'inconsistance de la base Σ, noté $Inc(\Sigma)$, est défini par :

$$Inc(\Sigma) = \max\{r | \Sigma \vdash_\pi (\bot, r)\}$$

On peut prouver que :
– $Inc(\Sigma) = 1 - \max_{\omega \in \Omega} \pi_\Sigma(\omega)$
– et que $N_\Sigma(\phi) = Inc(\Sigma \cup (\neg\phi, 1))$.

Comme en logique possibiliste standard, la fermeture déductive d'une base en LPS s'obtient en calculant $N_\Sigma(\phi), \forall \phi \in \mathcal{L}$ sous la forme d'une expression symbolique $\max / \min$. Si Σ^* dénote l'ensemble des formules apparaissant dans Σ, et B est un sous-ensemble de Σ^* qui implique ϕ, il est clair que $\Sigma \vdash_\pi (\phi, \min_{\phi_j \in B} \alpha_j)$, et donc on peut calculer par la déduction syntaxique l'expression valuant la force avec laquelle ϕ se déduit de Σ :

$$N_\Sigma^{\vdash}(\phi) = \max_{B \subseteq \Sigma^*, B \vdash \phi} \min_{\phi_j \in B} \alpha_j.$$

On a $N^{\vdash}_{\Sigma}(\phi) = N^{\vdash}_{\Sigma\cup\{(\neg\phi,1)\}}(\bot)$, où le degré d'inconsistance est formalisé par l'expression $N^{\vdash}_{\Sigma}(\bot)$.

Comme dans le cas standard, on définit l'inférence plausible en logique possibiliste avec des poids symboliques.

Définition 2 *ϕ est une conséquence plausible de (Σ, C), noté $(\Sigma, C) \vdash_{PL} \phi$ ssi :*

$$C \vDash N_{\Sigma}(\phi) > Inc(\Sigma) = N^{\vdash}_{\Sigma}(\bot)$$

Dans l'exemple 1, $N^{\vdash}_{\Sigma}(\psi) = \min(\alpha, \beta)$ $N^{\vdash}_{\Sigma}(\neg\psi) = \gamma$, et $N^{\vdash}_{\Sigma}(\bot) = \min(\alpha, \beta, \gamma)$. Comme $C \models \min(\alpha, \beta) > \gamma$, on a bien $N^{\vdash}_{\Sigma}(\psi) > N^{\vdash}_{\Sigma}(\bot)$, et ψ est une conséquence plausible de (Σ, C).

3 Preuve de complétude

Avec des poids connus on a, de par le caractère totalement ordonné de l'échelle de poids,

$$N_{\Sigma}(\phi) = \max\{r : (\Sigma^{\geq}_{r})^{*} \vdash \phi\}$$

où $\Sigma^{\geq}_{r} = \{(\phi_i, r_i) : r_i \geq r\}$ est la coupe de niveau r de Σ, et Σ^{*} est l'ensemble des formules apparaissant dans Σ. L'approche par l'inférence classique sur les coupes rend compte de l'inférence en logique possibiliste, et permet de prouver sa complétude en se ramenant à la complétude de la logique classique. Cette méthode ne marche plus avec des poids symboliques.

Pour prouver la complétude de la version symbolique de la logique possibiliste, il faut montrer l'égalité $N_{\Sigma}(\phi) = N^{\vdash}_{\Sigma}(\phi)$, ou plus précisément que l'expression symbolique de $N^{\vdash}_{\Sigma}(\phi)$ obtenue par le système d'axiomes et de règles d'inférence de la LPS peut se réécrire avec la même expression que celle de $N_{\Sigma}(\phi)$ construite sémantiquement. On ne suppose pas de contraintes entre les poids. Dans cette section, nous donnons une preuve de cette complétude [5] :

Proposition 1 *La logique possibiliste symbolique est saine et complète pour le système d'inférence ci-dessus, soit $N_{\Sigma}(\phi) = N^{\vdash}_{\Sigma}(\phi)$.*

Nous allons étudier séparément les cas Σ^{*} consistante et Σ^{*} inconsistante.

3.1 Bases consistantes

On suppose la base Σ^{*} consistante. Il faut montrer que
$N_{\Sigma}(\phi) = \min_{\omega \not\models \phi} \max_{j:\phi_j \notin \Sigma(\omega)} \alpha_j$
s'écrit aussi
$N^{\vdash}_{\Sigma}(\phi) = \max_{B \subseteq \Sigma^{*}, B \vdash \phi} \min_{\phi_j \in B} \alpha_j$.

Notons que :
- Pour $N^{\vdash}_{\Sigma}(\phi)$, on peut se limiter aux sous-bases minimales pour l'inclusion $B_i, i = 1, n$ de Σ^{*} qui impliquent ϕ : $N^{\vdash}_{\Sigma}(\phi) = \max_{i=1}^{n} \min_{\phi_j \in B_i} \alpha_j$.[1]
- Pour $N_{\Sigma}(\phi)$, on peut de même se limiter aux interprétations ω telles que $\omega \not\models \phi$ et $\Sigma(\omega)$ maximal pour l'inclusion : $N_{\Sigma}(\phi) = \min_{\omega \not\models \phi, \Sigma(\omega) \text{ maximal}} \max_{j:\phi_j \notin \Sigma(\omega)} \alpha_j$.

On peut simplifier l'écriture en remarquant que les sous-bases de la forme $\Sigma(\omega)$ maximales pour l'inclusion telles que $\omega \not\models \phi$ sont exactement les sous-bases maximales de Σ^{*} consistantes avec $\neg\phi$. On les notera dans la suite $M_{\neg\phi} \in \mathcal{M}_{\neg\phi}$. On peut donc écrire : $N_{\Sigma}(\phi) = \min_{M_{\neg\phi} \in \mathcal{M}_{\neg\phi}} \max_{\phi_j \notin M_{\neg\phi}} \alpha_j$.

Lemme 1 *Si Σ^{*} est une base minimale pour l'inclusion qui implique ϕ alors $N_{\Sigma}(\phi) = N^{\vdash}_{\Sigma}(\phi)$*

Preuve : $N^{\vdash}_{\Sigma}(\phi) = \min_{\phi_j \in \Sigma^{*}} \alpha_j$. Alors, $\forall \omega, \max_{j:\phi_j \notin \Sigma(\omega)} \alpha_j \geq N^{\vdash}_{\Sigma}(\phi)$ donc $N_{\Sigma}(\phi) \geq N^{\vdash}_{\Sigma}(\phi)$.
Réciproquement, si $\phi_k \in \Sigma^{*}$, $\Sigma^{*} \setminus \{\phi_k\} \not\vdash \phi$. Donc il y a un modèle ω_k de $\Sigma^{*} \setminus \{\phi_k\}$ qui n'est

1. Cela est dû au fait que les poids symboliques sont à valeurs dans un ensemble totalement ordonné, et donc, si $A \subset B, \min_{\phi_j \in B} \alpha_j \leq \min_{\phi_j \in A} \alpha_j$, affirmation non-valide si on considère C comme un ordre partiel strict abstrait sur H.

pas un modèle de ϕ. Donc $\Sigma(\omega_k) = \Sigma^* \setminus \{\phi_k\}$. Alors on voit que

$$N_\Sigma(\phi) = \min_{\omega \not\models \phi} \max_{j:\phi_j \notin \Sigma(\omega)} \alpha_j \leq \min_{\phi_k \in \Sigma^*} \alpha_k = N_\Sigma^\vdash(\phi).$$

Corollaire 1 *Dans le cas général,* $N_\Sigma(\phi) \geq N_\Sigma^\vdash(\phi)$

Preuve : Pour toute sous-base $B \subset \Sigma, N_\Sigma(\phi) \geq N_B(\phi)$. Si B est minimal qui implique ϕ, $N_B(\phi) = N_B^\vdash(\phi)$. Or, $N_\Sigma^\vdash(\phi) = \max_{i=1}^n N_{B_i}(\phi)$. Donc $N_\Sigma(\phi) \geq N_\Sigma^\vdash(\phi)$.

On peut réécrire, par distributivité, le degré de nécessité syntaxique, en utilisant les hitting sets minimaux de l'ensemble $\{B_1, \ldots, B_n\}$, une notion introduite dans la formalisation du raisonnement abductif [15]. Rappelons que H est un hitting set de $\{B_1, \ldots, B_n\}$ si et seulement si $H \subseteq B_1 \cup \cdots \cup B_n$ et $\forall i = 1 \ldots n, H \cap B_i \neq \emptyset$.

En indiçant tous les hitting sets minimaux (pour l'inclusion) H_s de $\{B_1, \ldots, B_n\}$ par $s \in \mathcal{S}$ on peut écrire :

$$\begin{aligned} N_\Sigma^\vdash(\phi) &= \max_{i=1}^{n} \min_{\phi_j \in B_i} \alpha_j. \\ &= \min_{s \in \mathcal{S}} \max_{\phi_j \in H_s} \alpha_j. \end{aligned}$$

Si $\overline{\Sigma(\omega)}$ est le complémentaire de $\Sigma(\omega)$ dans Σ :

Lemme 2 $\forall \omega \not\models \phi, \overline{\Sigma(\omega)}$ *contient un hitting set de* $\{B_1, \ldots B_n\}$ *(soit :* $\forall i, B_i \cap \overline{\Sigma(\omega)} \neq \emptyset$*).*

Preuve : Soit $\omega \not\models \phi$ tel que $\exists B_i, B_i \cap \overline{\Sigma(\omega)} = \emptyset$. Alors $B_i \subseteq \Sigma(\omega)$. Mais comme $\Sigma(\omega) \nvdash \phi$ par hypothèse, $B_i \nvdash \phi$ de même. Ce qui contredit le fait que $B_i \vdash \phi$.

En particulier ce résultat est vrai pour les $\overline{\Sigma(\omega)}$ minimaux pour l'inclusion. On obtiendra donc la complétude si on montre que :

Lemme 3 *Le complémentaire de tout hitting set minimal* H_s *de* $\{B_1, \ldots B_n\}$ *est une sous-base maximale de* Σ^* *consistante avec* $\neg\phi$ *(appelée* $M_{\neg\phi}$ *ci-dessus).*

Preuve : Soit un hitting set minimal $H_s = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ de $\{B_1, \ldots, B_n\}$ avec $\phi_i \in B_i$. Considérons l'ensemble $\overline{H_s}$. Cet ensemble est consistant, et il est consistant avec $\neg\phi$. Car sinon, $\overline{H_s} \vdash \phi$ et donc $\exists B_i \subseteq \overline{H_s}$ (tel que $B_i \vdash \phi$). C'est impossible car par définition de H_s, $H_s \cap B_i \neq \emptyset$. Donc $\overline{H_s}$ est consistant avec $\neg\phi$. De plus $\overline{H_s}$ est bien maximal consistant avec $\neg\phi$. En effet, si on ajoute $\phi_i \in H_s$ à $\overline{H_s}$, alors $H_s \setminus \{\phi_i\}$ n'est plus un hitting set. Il existe donc B_j tel que $H_s \setminus \{\phi_i\} \cap B_j = \emptyset$. Alors $B_j \subseteq \overline{H_s} \cup \{\phi_i\}$ et donc $\overline{H_s} \cup \{\phi_i\} \vdash \phi$ ce qui prouve que $\overline{H_s} \cup \{\phi_i\}$ n'est pas consistant avec $\neg\phi$. Donc $\exists M_{\neg\phi} = \overline{H_s}$.

Corollaire 2 $N_\Sigma(\phi) \leq N_\Sigma^\vdash(\phi)$

Preuve :

$$\begin{aligned} N_\Sigma^\vdash(\phi) &= \min_{s \in \mathcal{S}} \max_{\phi_j \in H_s} \alpha_j \\ &= \min_{M_{\neg\phi} = \overline{H_s}, s \in \mathcal{S}} \max_{\phi_j \notin M_{\neg\phi}} \alpha_j \\ &\geq \min_{M_{\neg\phi} \in \mathcal{M}_{\neg\phi}} \max_{\phi_j \notin M_{\neg\phi}} \alpha_j = N_\Sigma(\phi) \end{aligned}$$

En fait, il y a une bijection entre l'ensemble des sous-bases maximales de Σ^* consistantes avec $\neg\phi$ et l'ensemble des hitting sets minimaux $H_s = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ de $\{B_1, \ldots, B_n\}$, à savoir $\mathcal{M}_{\neg\phi} = \{\overline{H_s}, s \in \mathcal{S}\}$

Corollaire 3 *Pour toute sous-base maximale de* Σ^* *consistante avec* $\neg\phi$*,* $M_{\neg\phi}$*, il y a un hitting set minimal* H_s *de* $\{B_1, \ldots B_n\}$ *tel que* $M_{\neg\phi} = \overline{H_s}$

Preuve : $\overline{M_{\neg\phi}}$ est un sous-ensemble minimal de la forme $\overline{\Sigma(\omega)}$ avec $\omega \models \neg\phi$. Par le Lemme 2, $\overline{\Sigma(\omega)}$ contient un hitting set minimal H_s. Par le Lemme 3, son complémentaire est une sous-base maximale de Σ^* consistante avec $\neg\phi$. Ce ne peut donc être que $M_{\neg\phi}$.

3.2 Cas des bases inconsistantes

Si la base Σ^* est inconsistante, on a les résultats suivants :

– Soit $I_1, \ldots, I_p$ les sous bases minimales inconsistantes de Σ^*. Alors le degré d'inconsistance de Σ est $Inc(\Sigma) = \max_{k=1}^{p} \min_{\phi_j \in I_k} \alpha_j$, et $N_\Sigma^\vdash(\phi) = \max(Inc(\Sigma), \max_{i=1}^{n} \min_{\phi_j \in B_i} \alpha_j)$, les B_i étant les bases minimales (consistantes ou pas) qui impliquent ϕ.
– On remarque que $N_\Sigma^\vdash(\phi) \geq Inc(\Sigma)$ mais on n'a jamais d'inégalité stricte si on n'en pose pas. On peut avoir une inclusion stricte de l'ensemble des poids de $N_\Sigma^\vdash(\phi)$ dans l'ensemble des poids de $Inc(\Sigma)$.
– On garde la même définition pour $N_\Sigma(\phi)$ que dans le cas consistant, mais ici, $\forall\omega, \Sigma(\omega) \subset \Sigma$ (car $\Sigma(\omega)$ est consistant).

Si Σ^* est inconsistante, alors parmi les bases minimales qui impliquent ϕ certaines peuvent être inconsistantes. Mais certaines bases inconsistantes I_i peuvent ne pas figurer parmi elles. Par exemple, si $\Sigma = \{(\phi, a), (\neg\phi, b)\}$ la seule base minimale qui implique ϕ est $\{\phi\}$. On peut voir ici que

$$\begin{aligned} N_\Sigma^\vdash(\phi) &= \max_{B \subseteq \Sigma^*, B \vdash \phi} \min_{\phi_j \in B} \alpha_j \\ &= \max(\min(a, b), a) = a = N_\Sigma(\phi). \end{aligned}$$

De même, $N_\Sigma^\vdash(\neg\phi) = b$. On a donc $N_\Sigma^\vdash(\bot) = \min(a, b) \leq N_\Sigma^\vdash(\phi)$ et $N_\Sigma^\vdash(\bot) \leq N_\Sigma^\vdash(\neg\phi)$ seulement. On a bien $\{a\} \subset \{a, b\}$ mais on ne peut en conclure que $N_\Sigma^\vdash(\bot) < N_\Sigma^\vdash(\neg\phi)$.

Pour la preuve de complétude :

– Le Lemme 1 peut être reconduit, mais alors Σ^* est une base minimale inconsistante qui implique ϕ, aucune de ses sous-bases ne l'impliquant.
– Le corollaire 1 est valide en notant que minimal n'exclut pas inconsistant.
– Pour le Lemme 2, $\Sigma(\omega)$ est toujours consistant. Donc si B_i est inconsistant, on ne peut avoir $B_i \subset \Sigma(\omega)$.
– La preuve du Lemme 2 peut être reconduite telle quelle, car les $\overline{H_s}$ sont bien consistants, comme les $M_{\neg\phi}$.

Donc la preuve de complétude résiste à l'épreuve de l'inconsistance de la base. On peut aussi montrer que le raisonnement par réfutation est valide :

Proposition 2 $N_{\Sigma \cup \{(\neg\phi, 1)\}}(\bot) = N_\Sigma(\phi)$.

Preuve : Il suffit de remarquer qu'une base minimale inconsistante de $[\Sigma \cup \{(\neg\phi, 1)\}]^*$ est soit une base minimale inconsistante de Σ^*, soit une base minimale inconsistante B qui contient $\neg\phi$ donc $B \setminus \{\neg\phi\}$ est une base minimale consistante qui implique ϕ.

4 Méthodes d'inférence en LPS

On voit que la notion de sous-base minimale qui implique une formule joue un grand rôle dans l'inférence en logique possibiliste symbolique. Pour une formule ϕ, calculer l'expression de $N_\Sigma(\phi)$ demande de trouver toutes les sous-bases minimales B_i telles que $B_i \vdash \phi$. Certaines peuvent être inconsistantes. Dans ce cas il faut qu'elles soient également minimales dans Σ^* parmi celles qui impliquent ϕ. Donc, si $B_1, \cdots, B_k$ sont les sous-bases minimales qui impliquent ϕ, soit B_i est consistante soit B_i est une sous-base minimale inconsistante de Σ^*. Mais une sous-base minimale inconsistante de Σ^* n'est pas toujours une sous-base minimale qui implique ϕ. Soient $I_1, \cdots, I_l$ les sous-bases minimales inconsistantes de Σ^* qui ne contiennent aucun B_j, $j = 1 \cdots k$. On a donc :

$$N_\Sigma^\vdash(\phi) = \max \begin{cases} \max_{i=1}^{k} \min_{\phi_j \in B_i} \alpha_j, \\ \max_{i=1}^{l} \min_{\phi_j \in I_i} \alpha_j \end{cases}$$

Et comme on sait que $B \subseteq \Sigma^*$ est un minimal qui implique ϕ ssi B est minimal tel que $B \cup \{\neg\phi\}$ est inconsistant, on peut prouver [6] :

Proposition 3 *Soit* (Σ, C) *une base en LPS, et* B *une sous-base de* Σ^*.
– *Si* B *est consistante et minimale impliquant* ϕ *alors* $B \cup \{\neg\phi\}$ *est une sous-base minimale inconsistante de* $\Sigma^* \cup \{\neg\phi\}$.
– *Si* K *est une sous-base minimale inconsistante de* $\Sigma^* \cup \{\neg\phi\}$ *contenant* $\neg\phi$*, alors* $K \setminus \{\neg\phi\}$ *est consistante et minimale qui implique* ϕ.

4.1 Calcul des poids symboliques

En conséquence, calculer $N^{\vdash}_{\Sigma}(\phi)$ revient à déterminer :

- les sous-bases minimales inconsistantes K_i de $\Sigma^* \cup \{\neg\phi\}$ qui contiennent $\neg\phi$;
- les sous-bases minimales inconsistantes de Σ^* qui ne contiennent aucune des bases $B_i = K_i \setminus \{\neg\phi\}$ obtenues à l'étape précédente.

L'inférence en LPS se ramène donc au problème du calcul des sous-bases minimales inconsistantes d'une base en logique classique S, formant un ensemble $MIS(S)$. Soit
$\mathcal{B}^{\vdash}(\phi) = \{B \subseteq \Sigma^* | B \cup \{\neg\phi\} \in MIS(\Sigma^* \cup \{\neg\phi\})\}$
$\mathcal{B}_i(\phi) = \{B \in MIS(\Sigma^*) | \forall K \in \mathcal{B}^{\vdash}(\phi), B \not\supset K\}$.
et $\mathcal{B}(\phi) = \mathcal{B}^{\vdash}(\phi) \bigcup \mathcal{B}_i(\phi)$. Le degré de nécessité d'une formule ϕ est calculé comme suit :

$$N^{\vdash}_{\Sigma}(\phi) = \max_{B_i \in \mathcal{B}(\phi)} \min_{\phi_j \in B_i} \alpha_j \tag{1}$$

La méthode la plus efficace pour résoudre le problème MIS exploite la dualité existant entre les sous-bases minimales inconsistantes $MIS(S)$, et les sous-bases maximales consistantes $MCS(S)$ d'une base propositionnelle S et le fait que vérifier la consistance d'une base est plus facile que prouver son inconsistance [14]. $MIS(S)$ s'obtient à partir de $MCS(S)$ avec les hitting-sets [14].

4.2 Comparaison de poids symboliques

Ayant calculé les degrés de nécessité symboliques de deux formules, on s'intéresse à la comparaison de ces poids symboliques qui sont des expressions $\max / \min$ si les poids sont élémentaires dans la base. Vérifier si $\mathcal{C} \vDash N^{\vdash}_{\Sigma}(\phi) > N^{\vdash}_{\Sigma}(\psi)$ est de la forme

$$\mathcal{C} \vDash \max_{B \in \mathcal{B}(\phi)} \min_{i : \phi_i \in B} a_i > \max_{C \in \mathcal{B}(\psi)} \min_{j : \phi_j \in C} b_j.$$

Soit à trouver une expression $\min(a_1, \cdots a_n)$ dans $N^{\vdash}_{\Sigma}(\phi)$ qui domine toutes les expressions $\min(b_1, \cdots, b_m)$ dans $N^{\vdash}_{\Sigma}(\psi)$. De même tester si $\min(a_1, \cdots a_n) > \min(b_1, \cdots, b_m)$ revient à vérifier si on trouve un b_j tel que $\forall i = 1, \ldots n, a_i > b_j \in \mathcal{C}$ [2]. Plutôt qu'un test brutal sur $\mathcal{B}(\phi)$ et $\mathcal{B}(\psi)$, on peut utiliser les ensembles de poids élémentaires apparaissant dans les expressions de$N^{\vdash}_{\Sigma}(\phi)$ et $N^{\vdash}_{\Sigma}(\psi)$, en simplifiant ces expressions avant de les comparer. L'utilisation d'une technique de type ATMS [8] peut s'avérer utile. Elle est décrite dans [6].

4.3 Différence avec [3]

Il y a plusieurs différences avec le formalisme proposé il y a 10 ans par Benferhat et Prade : [2]

- Une formule pondérée symboliquement (ϕ, a) par un poids élémentaire est codée dans [3] par une formule classique $A \vee \phi$ où A est une variable booléenne censée signifier "$\geq a$", soit $[a, 1]$ (tandis que dans [6] nous utilisons $\neg a \vee \phi$, voyant les poids symboliques comme des variables hypothèses dans un ATMS).
- Dans [3] les contraintes entre poids complexes sont réflexives (non strictes), de type $\alpha \geq \beta$. Cela permet de les coder aussi comme des propositions classiques (pour des poids élémentaires, $\neg A \vee B$ code $a \geq b$). On peut donc tout exprimer (formules, poids, contraintes) avec une base propositionnelle sous forme clausale. Ils utilisent alors une technique de type variable-forgetting pour calculer le degré de nécessité d'une formule. On ne peut pas coder d'inégalité stricte avec l'implication matérielle, d'où notre usage d'algorithmes de type abduction [15] et de l'approche ATMS [8].
- Dans [3], $\mathcal{C} \vDash \alpha > \beta$ veut dire $\mathcal{C} \vDash \alpha \geq \beta$ et $\mathcal{C} \nvDash \beta \geq \alpha$ ce qui ressemble à l'ordre de Pareto strict entre vecteurs ($\mathcal{C} \vDash \alpha > \beta$ si dans toutes les instanciations de α, β conformes aux contraintes, on a $\alpha \geq \beta$ et dans au moins une on a $\alpha > \beta$). Avec cette vision, de $\Sigma = \{(\phi, a), (\psi, b)\}$ et $\mathcal{C} = \emptyset$ on peut inférer $N_{\Sigma}(\phi \vee \psi) > N_{\Sigma}(\phi)$. En effet, on voit que $N_{\Sigma}(\phi) = a, N_{\Sigma}(\phi \vee$

2. D'autres travaux sur les bases propositionnelles partiellement ordonnées existent, notamment par S. Benferhat et collègues mais ils introduisent directement un ordre partiel sur les formules sans utiliser les poids (voir [5] pour une bibliographie).

$\psi) = \max(a,b)$, $\mathcal{C} \vDash \max(a,b) \geq a$ mais pas $\mathcal{C} \vDash a \geq \max(a,b)$. Cela revient à définir inégalité stricte comme l'impossibilité d'en prouver une large, ce qui est non-monotone, car on interprète par défaut les contraintes larges par des contraintes strictes. Cela semble problématique, sauf à supposer que des variables distinctes prennent toujours des valeurs distinctes comme dans [2]. Dans notre cadre, $p > q$ veut dire que l'inégalité tient pour toute instantiation de p, q en accord avec les contraintes de $\mathcal{C}$ (qui ne contient que ce type de contraintes).

5 Conclusion

On présente une nouvelle version de la logique possibiliste des contraintes d'ordre strict entre les poids mal connus. Elle diffère des logiques conditionnelles [13] où ces contraintes sont imposées, tandis qu'en LPS, elles peuvent être remises en cause, grâce à l'usage du principe de spécificité minimale, si les contraintes initiales contredisent la déduction classique. Notre cadre est une alternative à l'approche à base d'inégalités lâches de [3], tandis que l'approche originelle [2] utilise des inégalités strictes. Dans le futur, il serait intéressant de manipuler à la fois des contraintes d'inégalité strictes et larges, puisque notre cadre autorise aussi l'inférence d'inégalités larges (par la règle d'affaiblissement). La LPS peut être utile dans plusieurs domaines : dans les logiques terminologiques décrivant des ontologies elle peut permettre de distinguer entre des niveaux d'importance, de confiance ou d'autorisation d'accessibilité des informations [1]. On peut également penser à des applications en fusion d'informations et en représentation des préférences [7].

Références

[1] F. Baader, M. Knechtel, R. Penaloza, Context-dependent views to axioms and consequences of semantic web ontologies. *J. Web Semantics* **12-13** (2012) 22-40

[2] S. Benferhat, D. Dubois, H. Prade. Logique possibiliste avec calcul symbolique sur des poids partiellement contraints. *Actes LFA 2004*, Nantes, Cépaduès (2004) 67-74

[3] S. Benferhat and H. Prade. Encoding formulas with partially constrained weights in a possibilistic-like many-sorted propositional logic. *Proc. Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence*, Professional Book Center (2005) 1281–1286

[4] Benferhat, S., Cayrol, C., Dubois, D., Lang, J., Prade, H. : Inconsistency management and prioritized syntax-based entailment. *Proc. Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence* Morgan-Kaufmann (1993) 640–645

[5] Cayrol, C., Dubois, D., Touazi F., Fermeture déductive d'une base partiellement ordonnée. Rapport de recherche, RR–2014-08–FR, IRIT, novembre 2014. www.irit.fr/publis/ADRIA/PapersCayrol

[6] Cayrol, C., Dubois, D., Touazi F., Inférence sur des bases partiellement ordonnées : Implémentation. Rapport de recherche, RR–2015–08–FR, IRIT, mai 2015. www.irit.fr/publis/ADRIA/PapersCayrol

[7] Dubois, D., Prade, H., Touazi, F. : Conditional preference nets and possibilistic logic. *Proc. ECSQARU*. Volume 7958 of LNCS, Springer (2013) 181–193

[8] De Kleer, J. : An assumption-based TMS. *Artificial intelligence* **28** (1986) 127–162

[9] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Possibilistic logic. In D.M. Gabbay, C.J. Hogger, J.A Robinson, and D. Nute, editors, *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming, Vol. 3*, Oxford University Press (1994) 439–513

[10] D. Dubois and H. Prade. *Possibility Theory*. Plenum Press, New York (NY) 1988

[11] D. Dubois and H. Prade. Possibilistic logic : a retrospective and prospective view. *Fuzzy Sets and Systems*, **144**(1) (2004) 3–23.

[12] D. Dubois and H. Prade. Possibilistic logic– an overview. In D. Gabbay, J. Woods, Reds., *Computational Logic*, volume 9 of *The Handbook of the History of Logic*, Elsevier, (2014) 283-342

[13] Halpern, J.Y. : Defining relative likelihood in partially-ordered preferential structures. Journal of Artificial Intelligence Research **7** (1997) 1–24

[14] McAreavey, K., Liu, W., Miller, P. : Computational approaches to finding and measuring inconsistency in arbitrary knowledge bases. *Int. J. Approx. Reas.* **55** (2014) 1659 – 1693

[15] Reiter, R. : A theory of diagnosis from first principles. *Artificial intelligence* **32** (1987) 57–95